TÓPICOS EM GEOMETRIA E TOPOLOGIA II

Quadrimestre 2024.2

Plano de Ensino
Stefano Nardulli, UFABC

Sumário

1 Funcionamento do Curso

Páginas da disciplina:

- Página web de Stefano Nardulli `http://professor.ufabc.edu.br/~stefano.nardulli/index.html`. Todas as informações sobre a disciplina, incluindo notas de aula, videos, datas importantes estarão centralizadas na minha página web. Você poderá encontrar material adicional sobre a disciplina, incluindo sugestões adicionais de bibliografia e listas de exercícios.

Objetivos
Sistematizar a noção de varifold em espaços Euclidianos e Riemannianos e introduzir os fundamentos da teoria geométrica da medida. Particular enfase será dada a demonstração detalhada do teorema de regularidade no interior de Allard. Se o tempo permitir, serão apresentadas também aplicações à teoria da regularidade de soluções do problema de Plateau orientado e do problema isoperimétrico.

Competências
Compreender os conceitos de varifold, corrente e conjuntos de perímetro finito é fundamental para a análise geométrica moderna e o cálculo das variações. Esses conceitos formam a base para a investigação de problemas geométricos e variacionais complexos. A seguir, delineiam-se os principais objetivos de aprendizado e as habilidades que se espera que os estudantes desenvolvam:

Conceitos Fundamentais

- **Varifolds:** Compreender a definição de varifold e sua importância na representação de superfícies e conjuntos generalizados em um espaço euclidiano ou em uma variedade. Estudar as propriedades básicas das varifolds, incluindo suas medidas associadas e aplicações em problemas geométricos.

- **Correntes:** Estudar as correntes como generalizações de superfícies orientadas e sua utilização em teoria geométrica da medida. Compreender a definição de corrente, operações básicas, como fronteira e produto de correntes, e sua relação com formas diferenciais.

- **Conjuntos de Perímetro Finito:** Analisar conjuntos de perímetro finito e suas propriedades em termos de medidas e funções características. Entender como esses conjuntos são utilizados para modelar fronteiras irregulares e problemas de minimização de perímetro.

Teoremas Fundamentais

- **Teorema de Retificabilidade:** Ser capaz de demonstrar o teorema de retificabilidade, que caracteriza as varifolds retificáveis e estabelece a relação entre varifolds e conjuntos de medida. Compreender as implicações desse teorema para a teoria geométrica da medida.

- **Teorema de Compacidade:** Demonstrar o teorema de compacidade de varifolds, que garante a existência de subsequências convergentes sob certas condições. Aplicar esse teorema na análise de sequências de varifolds e na solução de problemas variacionais.

- **Teorema de Regularidade de Allard:** Estudar e demonstrar o teorema de regularidade de Allard, que fornece condições sob as quais uma varifold é regular em quase todos os pontos. Utilizar esse teorema para investigar a regularidade de soluções de problemas variacionais geométricos.

Variações e Otimização

- **Variação Primeira e Segunda:** Compreender as variações primeira e segunda de uma funcional geométrica e suas aplicações em problemas de otimização. Estudar as condições de Euler-Lagrange e as condições de segunda ordem para o operador de Jacobi.
- **Aplicações em Problemas Geométricos:** Utilizar as informações fornecidas pelas variações primeira e segunda na resolução de problemas de análise geométrica. Abordar problemas variacionais geométricos específicos, como a minimização de áreas e volumes sob restrições, e a otimização de formas e estruturas.

Ao dominar esses conceitos e teoremas, os estudantes estarão aptos a enfrentar desafios complexos em análise geométrica e cálculo das variações, contribuindo significativamente para a pesquisa e desenvolvimento na área de matemática pura e aplicada, particularmente na subárea de análise geométrica.

Ementa
Revisão de teoria abstrata da medida. Medida de Hausdorff. Espaços métricos é funções Lipschitzianas. Funções de variação limitada BV. Conjuntos rectifiáveis. Conjuntos de perímetro finito. Teoria das varifolds gerais. Teoria das varifolds rectifiaveis. Teoria das varifolds integrais. Variação primeira de uma varifold. Desigualdade de Michael Simon. Variação segunda de uma varifold. Teoremas de compacidade para varifolds. Teorema de regularidade no interior de Allard, caso geral de varifolds m-dimensionais com curvatura média em L^p, $p > m \geq 1$.

Bibliografia Principal [EG15, Sim83, Sim17].

Bibliografia Complementar [Fed96, All72, Mor16, LY02, KP08, Mag12].
Presença e aulas
Este é um curso presencial, com duas aulas semanais. Para aprovação, é necessária presença em pelo menos 75% das aulas. Ou seja, o número máximo de faltas é **seis**.

Vídeos YouTube `https://youtu.be/E9yCxKI3Piw`. Os vídeos podem ser usados para complementar e revisar o conteúdo visto em aula.

Atendimento extra-classe
Toda quarta e sexta depois da aula na sala A 510-2 (Bloco A, Torre 2).

2 Método avaliativo

O método avaliativo consistirá em uma prova escrita sobre algumas listas de exercícios que serão distribuidas ao longo do curso, seminários com apresentação oral sobre um tema a combinar com o docente previamente.

Provas

Aplicação de uma prova escrita, na semana 12 do curso.

Médias e conceitos

Caso a frequência seja menor que 75% (mais do que seis faltas), o discente ficará com conceito O (reprovação por faltas). Caso contrário, o conceito será atribuído a partir da seguinte média:

$$M := \max\{\mathbf{NE}, \frac{\mathbf{NE}+\mathbf{NS}}{2}\},$$

sendo:

- $\mathbf{NS}$ nota do seminário;
- $\mathbf{NE}$ nota obtida na prova escrita.

Tabela de conversão

Intervalo de Notas	Conceito
$M \geq 8,5$	A
$7 \leq M < 8,5$	B
$5 \leq M < 7$	C
$4,5 \leq M < 5$	D
$M < 4,5$	F

Prova Substitutiva
O aluno que perder uma prova por razão justificada, de acordo com o regimento da UFABC, deve manifestar o interesse em realizar uma prova substitutiva, na data estipulada pelo professor.

Recuperação
Os discentes com conceito final D ou F terão direto a fazer um exame de recuperação. A data deste exame, bem como o critério de aprovação, ficam a cargo do docente, i.e., primeira semana do Q3 do ano academico 2024.

Referências Bibliográficas

[All72] William K. Allard. On the first variation of a varifold. *Ann. Math. (2)*, 95:417–491, 1972.

[EG15] Lawrence Craig Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Textb. Math. Boca Raton, FL: CRC Press, 2nd revised ed. edition, 2015.

[Fed96] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Class. Math. Berlin: Springer-Verlag, repr. of the 1969 ed. edition, 1996.

[KP08] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. *Geometric integration theory.* Cornerstones. Basel: Birkhäuser, 2008.

[LY02] Fanghua Lin and Xiaoping Yang. *Geometric measure theory. An introduction*, volume 1 of *Adv. Math., Beijing/Boston.* Beijing: Science Press; Boston, MA: International Press, 2002.

[Mag12] Francesco Maggi. *Sets of finite perimeter and geometric variational problems. An introduction to geometric measure theory*, volume 135 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[Mor16] Frank Morgan. *Geometric measure theory. A beginner's guide. Illustrated by James F. Bredt*. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 5th edition edition, 2016.

[Sim83] Leon Simon. *Lectures on geometric measure theory*, volume 3 of *Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ.* Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

[Sim17] Leon Simon. *Introduction to geometric measure theory.* 2017.