

Plano de Ensino Dinâmica não linear e Caos 2024.3

Professor: Rafael Vilela

Atendimento extra-classe: sob demanda, na sala 1021 do bloco B

Recomendação, ementa e bibliografia da disciplina podem ser encontradas no site

https://prograd.ufabc.edu.br/pdf/Catlogo_2022_2023_1008.pdf

Avaliação: 2 Provas, pesos iguais, notas numéricas

Prova 1: 19 de novembro

Prova 2: 20 de dezembro

Critério: (onde M é a média aritmética entre P1 e P2)

$9 \leq M$: A

$7,5 \leq M < 9$: B

$5,5 \leq M < 7,5$: C

$4,5 \leq M < 5,5$: D

$M < 4,5$: F

Exame de recuperação (para quem obtiver conceito D ou F): no início do 1o quadrimestre de 2025, em data, horário e local a serem marcados e divulgados nesta página.

Conteúdo do exame: toda a matéria vista no quadrimestre

A média após o exame é a média aritmética (MFINAL) entre a nota final pré-exame (M) e a nota no exame. Além disso, o conceito pós-exame é:

C, se $MFINAL \geq 5,5$

D, se $4,5 \leq MFINAL < 5,5$ OU se $4,5 \leq M < 5,5$ (ou seja, ninguém muda de D para F)

F, se $MFINAL < 4,5$ e se $M < 4,5$

Cronograma planejado:

Aula 1:

Cap. 0: Introdução

Motivação e um pouco de história

Sistemas Dinâmicos: EDOs e “mapas” (equações de diferença)

Sistemas Dinâmicos: determinismo (mas imprevisibilidade se Caos)

Aula 2: (revisão de IEDO)

Cap. 1: Dinâmica não linear em EDOs

Dinâmica não linear em dimensão 1: Equações de 1ª ordem autônomas

Retrato de fase

Teorema: sinal do módulo da derivada do campo e estabilidade (instável ou assintoticamente estável)

Dinâmica em dimensão 2: Sistemas de 2 EDOs autônomas lineares

Retrato de fase: Selas, nós e espirais

Aula 3:

Dinâmica não linear em dimensão 2: Sistemas de 2 EDOs autônomas não lineares

Sistemas conservativos

Exemplo: retrato de fase do pêndulo simples

Linearização do campo na vizinhança de um equilíbrio

Aula 4:

Teorema: parte real negativa de todos os autovalores implica estabilidade assintótica

Conjugação topológica

Definição: equilíbrio hiperbólico

Teorema: Hartman-Grobman

Aula 5:

Função de Lyapunov e teorema da estabilidade de Lyapunov

Retrato de fase do pêndulo dissipativo

Ciclos-limite

Aula 6:

Conjuntos ômega limite

Poincaré-Bendixson: possibilidades de dinâmica assintótica no plano

O oscilador de Duffing

Teorema de Liouville

O sistema de Lorenz

Aula 7:

Cap. 2: Mapas unidimensionais

- visualização gráfica: diagrama da teia de aranha
- pontos fixos
- fontes e sorvedouros
- critério do módulo da derivada

Aula 8:

- Órbitas periódicas
- extensão do critério do módulo da derivada para órbitas periódicas
- A família logística

- os regimes $0 < a < 1$, $1 < a < 3$, $3 < a < 1 + \sqrt{6}$

Aula 9:

- diagrama de bifurcação do mapa logístico para $0 < a \leq 4$
- o cenário de duplicação de período
- "caos" (ainda sem uma definição precisa)
- definição: conjuntos densos
- janelas periódicas densas

Aula 10:

- definição: conjuntos enumeráveis
- definição: conjuntos de medida nula
- exemplo análogo ao das janelas periódicas: união de intervalos centrados nos racionais em $[0,1]$ não tem medida 1.
- O mapa logístico com parâmetro 4: existência de órbitas periódicas de todos os períodos

Aula 11:

- Dependência sensível às condições iniciais
- O mapa da tenda
- Itinerários e o mapa "shift"
- Dependência sensível às condições iniciais para pontos iterados sob o mapa da tenda

Aula 12:

- Expoentes de Lyapunov para mapas 1D
- Definição de órbitas assintoticamente periódicas
- Definição de Caos para mapas 1D
- Demonstração de que o mapa da tenda com altura 1 tem infinitas órbitas caóticas
- Conjugação topológica

- Conjugação leva órbitas em órbitas
- Conjugação entre o mapa logístico $f(x)=4x(1-x)$ e a tenda

Aula 13: Aula de exercícios em preparação para a prova 1

Aula 14: Será na primeira semana de janeiro, em reposição ao feriado de 15 de novembro
Prova substitutiva (para quem perder alguma das provas, e tiver justificativa)

Aula 15 (19 de novembro): Prova 1

Aula 16:

- Conjugação diferenciável tal que $C'(x)$ é diferente de zero ao longo da órbita preserva números de Lyapunov
- Todos os pontos periódicos sob o mapa logístico $4x(1-x)$ são fontes
- Relação entre Lyapunov da tenda e do logístico $4x(1-x)$
- Mapa logístico $4x(1-x)$ possui órbitas caóticas

Aula 17:

- Mapa logístico $4x(1-x)$ possui órbitas caóticas densas em $[0,1]$
- Introdução do mapa da tenda aberto

Aula 18:

- Conjunto de Cantor construído pela dinâmica do mapa da tenda aberto
- Propriedades do conjunto de Cantor: medida nula, é infinito, contém pontos além dos extremos dos intervalos removidos, mesma cardinalidade do intervalo, a maioria dos pontos não são extremos dos intervalos removidos
- Motivação e definição da dimensão da contagem de caixas
- Teorema 4.15 do livro e cálculo da dimensão para o conjunto de Cantor do terço médio

Aula 19:

- ☐ Mapa afim por partes com "atratores" em $+$ e $-$ infinito
- ☐ Cálculo da dimensão da fronteira
- ☐ Lei de escala para o comprimento do conjunto de pontos "epsilon-incertos"
Cap. 3: Elementos de Caos Hamiltoniano
- ☐ Mapas derivados de EDOs: Lorenz (tenda), de Poincare e estroboscópico
- ☐ Exemplo: sistema planar com ciclo-limite, dado em coords polares por $r' = r(1-r)$ e $\theta' = 1$

Aula 20:

Sistemas Hamiltonianos (Brevíssimo panorama: Newton, Lagrange, Hamilton)

Aula 21:

- Preservação de volume em fluxos Hamiltonianos
- Preservação de área e orientação em mapas de Poincaré de sistemas de um grau e meio de liberdade
- Mapas bidimensionais com determinante 1: pontos elípticos e hiperbólicos
- Subespaços estável e instável
- Comportamento na vizinhança de pontos hiperbólicos: teorema de Hartman-Grobman
- Variedades estável e instável

Aula 22:

- Interseções homoclinicas e a ferradura no espaço de fase
- Dinâmica do mapa da ferradura de Smale
- Conjugação topológica com o "shift" em sequências bi-infinitas de dois símbolos
- Dependência sensível às condições iniciais no mapa da ferradura
- Mais propriedades do mapa da ferradura: pontos periódicos são densos e existe órbita densa
- Caos de separatriz

Aula 23:

Aula de exercícios em preparação para a prova 2

Aula 24 (20 de dezembro): Prova 2

EXERCÍCIOS SUGERIDOS:

OS EXERCÍCIOS SERÃO DISPONIBILIZADOS AO LONGO DO QUADRIMESTRE, DE ACORDO COM O CONTEÚDO QUE ESTIVER SENDO DADO
